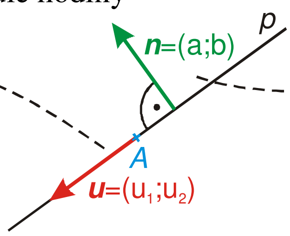
7.3.13 Polohové úlohy v rovině II

Předpoklady: 070312

Přehled analytiky z úvodu minulé hodiny



parametrické vyjádření

$X = A + t\boldsymbol{u}$ $\quad x = a_1 + tu_1$

$y = a_2 + tu_2 \quad t \in R$

omezením parametru, můžeme vyjádřit i části přímky

nejednoznačnost

obecná rovnice

$ax + by + c = 0$

c získáme dosazením bodu

směrnicový tvar

$y = kx + q$

přímka procházející bodem

$y - a_2 = k(x - a_1)$

úsekový tvar

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

průsečíky s osami

$P[p;0], Q[0;q]$

nerovnice pro polorovinu

$ax + by + c \geq 0$

body ve stejné polorovině mají stejné znaménko

x,y - neznámé, místo pro dosazení souřadnic bodů

a,b,c,p,q,a₁,a₂,... - čísla, která rozlišují různé přímky od sebe navzájem

průsečíky - splňují obojí rovnice- řešení soustav

Př. 1: Je dán trojúhelník ABC; $A[-1;-2]$, $B[3;-3]$, $C[5;5]$. Najdi:
a) obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice t_a,
b) parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_b.

a) obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice t_a

Těžnice prochází vrcholem $A[-1;-2]$ a středem strany a, bodem S_{BC}.

Souřadnice bodu $S_{BC}\left[\frac{3+5}{2};\frac{-3+5}{2}\right] = [4;1]$.

Hledáme obecnou rovnici $\Rightarrow$ potřebujeme normálový vektor.

$\boldsymbol{u}_t = S_{BC} - A = (4-(-1);1-(-2)) = (5;3)$

$\boldsymbol{n}_t = (3;-5) \Rightarrow$ obecná rovnice $3x - 5y + c = 0$.

Dosadíme $S_{BC}[4;1]$: $3\cdot 4 - 5\cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -7$

Rovnice přímky, na které leží těžnice t_a: $3x - 5y - 7 = 0$

b) parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_b

Výška v_b je přímka kolmá na stranu AC, procházející bodem B.

$\boldsymbol{u}_{AC} = C - A = (5-(-1);5-(-2)) = (6;7)$

Směrový vektor přímky v_b je kolmý na přímku $AC \Rightarrow \boldsymbol{u}_v = (7;-6)$

Parametrické vyjádření přímky v_b: $X = B + t\boldsymbol{u}_v$

$x = 3 + 7t$
$y = -3 - 6t; t \in R$

Př. 2: Napiš pomocí parametru všechny přímky, které procházejí bodem $B[-2;3]$ a s osou x svírají kladný úhel větší než $45°$.

Zapisujeme přímky procházející daným bodem $\Rightarrow$ směrnicový tvar $y - a_2 = k(x - a_1)$.

Dosadíme bod $B[-2;3]$: $y - 3 = k(x - [-2])$.

Zbývá určit hodnoty směrnice *k*: kladný úhel větší než $45°$ ($\varphi > 45°$) $\Rightarrow$ $k = \mathrm{tg}\varphi > 1$ $\Rightarrow$ $k \in (1;\infty)$ $\Rightarrow$ hledané přímky můžeme zapsat: $y - 3 = k(x+2)$, $k \in (1;\infty)$.

Př. 3: Urči všechny hodnoty parametru *m*, pro které jsou přímky $p: mx + 6y - 2my + 3 = 0$ a $q: 2x + my + 1 = 0$ a) navzájem kolmé; b) rovnoběžné.

a) přímky jsou navzájem kolmé

Přímky jsou navzájem kolmé, právě když jsou navzájem kolmé jejich normálové vektory a tedy je nulový jejich skalární součin.

$\boldsymbol{n}_p = (m; 6-2m)$, $\boldsymbol{n}_q = (2;m)$ a platí $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = 0$.

Dosadíme: $\boldsymbol{n}_p \cdot \boldsymbol{n}_q = (m;6-2m)\cdot(2;m) = 2m + 6m - 2m^2 = 0$.

$8m - 2m^2 = 0$

$m(4-m) = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = 4$

b) přímky jsou navzájem rovnoběžné

Přímky jsou navzájem rovnoběžné, když jejich normálové vektory jsou svými násobky.

$\boldsymbol{n}_p = (m; 6-2m)$, $\boldsymbol{n}_q = (2;m)$ a platí $\boldsymbol{n}_p = k \cdot \boldsymbol{n}_q$.

Dosadíme: $\boldsymbol{n}_p = k \cdot \boldsymbol{n}_q \Rightarrow (m;6-2m) = k(2;m)$.

Soustava rovnic: $\begin{aligned} m &= 2k \\ 6 - 2m &= km \end{aligned}$.

Z první rovnice dosadíme do druhé: $6 - 2\cdot 2k = k \cdot 2k \quad / : 2$.

$3 - 2k = k^2$

$k^2 + 2k - 3 = 0$

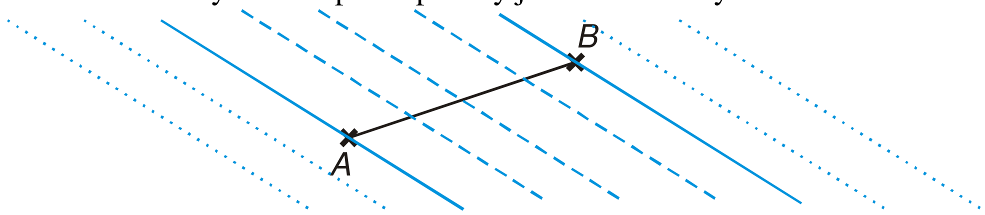
$(k+3)(k-1) = 0$

$k_1 = -3 \Rightarrow m_1 = 2k = 2\cdot(-3) = -6 \qquad k_2 = 1 \Rightarrow m_2 = 2k = 2\cdot 1 = 2$

Pedagogická poznámka: Pro mnohé žáky je problémem zapsat si souřadnice normálového vektoru přímky *p*. Někteří dokonce bojují s tím, jestli je to rovnice přímky, když je tam *y* dvakrát. Většinou stačí poradit, aby si *y* vytkli.

Př. 4: Najdi všechny hodnoty parametru *c*, pro které se přímka $2x + y + c = 0$ protíná s úsečkou *AB*, $A[-1;5]$, $B[2;1]$.

Hodnota parametru *c* ovlivňuje posunutí přímky ve svislém (vodorovném) směru, nemění její směr $\Rightarrow$ všechny takto zapsané přímky jsou rovnoběžky. Nakreslíme si obrázek.



Z obrázku vidíme, že pro dvě hodnoty parametru c_A, c_B přímky prochází krajními body *A*, *B*, pro hodnoty parametru v intervalu $\langle c_A; c_B \rangle$ pak přímky prochází vnitřními body úsečky *AB*.

Dosadíme do rovnice přímky bod $A[-1;5]$: $2(-1) + 5 + c_A = 0 \Rightarrow c_A = -3$.

Dosadíme do rovnice přímky bod $B[2;1]$: $2 \cdot 2 + 1 + c_B = 0 \Rightarrow c_B = -5$.

Přímka $2x + y + c = 0$ se protíná s úsečkou *AB* pro hodnoty parametru $c \in \langle -5; -3 \rangle$.

Př. 5: Najdi přímku, která prochází bodem $A[2;3]$ a platí pro ni, že její průsečík s osou *x* je od počátku soustavy souřadnic dvakrát vzdálenější než průsečík s osou *y*.

Zajímáme se o průsečíky s osami $\Rightarrow$ použijeme úsekový tvar $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Průsečík s osou *x*: $P[p;0] \Rightarrow$ průsečík s osou *y*: $Q\left[0; \pm\frac{p}{2}\right]$ (aby vzdálenost od počátku byla poloviční než u průsečíku s osou *x*) $\Rightarrow$ pokračujeme ve dvou sloupcích.

$q = \frac{p}{2}$ | $q = -\frac{p}{2}$

Dosadíme do rovnice přímky.

$\frac{x}{p} + \frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{x}{p} + \frac{2y}{p} = 1$ | $\frac{x}{p} - \frac{y}{\frac{p}{2}} = \frac{x}{p} - \frac{2y}{p} = 1$

Rovnici přímky musí vyhovovat bod $A[2;3]$.

$\frac{2}{p} + \frac{2 \cdot 3}{p} = 1 \quad / \cdot p$ | $\frac{2}{p} - \frac{2 \cdot 3}{p} = 1 \quad / \cdot p$

$2 + 6 = p$ | $2 - 6 = p$

$p = 8$ | $p = -4$

Přímka: $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$, průsečíky: $P[8;0]$, $Q[0;4]$.

Přímka: $-\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, průsečíky: $P[-4;0]$, $Q[0;2]$.

Př. 6: Jsou dány dvě přímky: jedna je zadána obecnou rovnicí, druhá parametricky. Rozhodni co nejrychleji bez určení průsečíků, zda jsou rovnoběžné (případně totožné) nebo různoběžné. Navržený postup ověř na přímkách z příkladu 2, $p: 2x-3y+1=0$ a $q=\{[1-6t;-2-4t], t\in R\}$.

Dvě přímky jsou rovnoběžné (nebo totožné) pokud mají stejný směr. Pokud je jedna z přímek dána obecnou rovnicí, musí být její normálový vektor kolmý na směrový vektor druhé přímky (aby byl jejím normálovým vektorem také) $\Rightarrow$ skalární součin normálového vektoru jedné a směrového vektoru druhé přímky musí být nulový.

$p: 2x-3y+1=0 \Rightarrow \boldsymbol{n}_p=(2;-3)$

$q=\{[1-6t;-2-4t], t\in R\} \Rightarrow \boldsymbol{u}_q=(-6;-4)$

$\boldsymbol{n}_p\cdot\boldsymbol{u}_q=(2;-3)\cdot(-6;-4)=2\cdot(-6)+(-3)\cdot(-4)=0 \Rightarrow$ přímky p, q jsou rovnoběžné nebo totožné (jak už víme z příkladu 2).

Př. 7: Je dán trojúhelník ABC, $A[-3;1]$, $B[3;-2]$, $C[1;4]$. Rozhodni, zda bod $D[-2;2]$ leží uvnitř trojúhelníku ABC. Pokud bod D uvnitř trojúhelníku ABC neleží, rozhodni, ve které z částí roviny rozdělené stranami trojúhelníku bod D leží.

Bod D leží uvnitř trojúhelníka, právě když leží:

- vzhledem k přímce AB ve stejné polorovině jako bod C,
- vzhledem k přímce BC ve stejné polorovině jako bod A,
- vzhledem k přímce AC ve stejné polorovině jako bod B.

V případě, že bod D nebude ležet uvnitř trojúhelníku, můžeme z předchozích nerovností určit jeho polohu v rovině.

Leží bod D vzhledem k přímce AB ve stejné polorovině jako bod C?

Rovnice přímky AB: $B-A=(6;-3)\Rightarrow(2;-1)\Rightarrow\boldsymbol{n}_{AB}=(1;2) \Rightarrow$ rovnice $x+2y+c=0$, dosadíme bod $A[-3;1]$: $(-3)+2\cdot1+c=0 \Rightarrow c=1 \Rightarrow$ rovnice $x+2y+1=0$.

- Bod $C[1;4]$: $x+2y+1=1+2\cdot4+1=10$,
- bod $D[-2;2]$: $x+2y+1=(-2)+2\cdot2+1=3$,

$\Rightarrow$ bod D leží vzhledem k přímce AB ve stejné polorovině jako bod C.

Leží bod D vzhledem k přímce BC ve stejné polorovině jako bod A?

Rovnice přímky BC: $C-B=(-2;6)\Rightarrow(-1;3)\Rightarrow\boldsymbol{n}_{BC}=(3;1) \Rightarrow$ rovnice $3x+y+c=0$, dosadíme bod $B[3;-2]$: $3\cdot3+(-2)+c=0 \Rightarrow c=-7 \Rightarrow$ rovnice $3x+y-7=0$.

- Bod $A[-3;1]$: $3x+y-7=3(-3)+1-7=-15$,
- bod $D[-2;2]$: $3x+y-7=3(-2)+2-7=-11$,

$\Rightarrow$ bod D leží vzhledem k přímce BC ve stejné polorovině jako bod A.

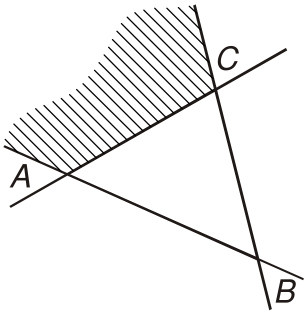
Leží bod D vzhledem k přímce AC ve stejné polorovině jako bod B?

Rovnice přímky AC: $C-A=(4;3)\Rightarrow\boldsymbol{n}_{AC}=(3;-4) \Rightarrow$ rovnice $3x-4y+c=0$, dosadíme bod $A[-3;1]$: $3(-3)-4\cdot1+c=0 \Rightarrow c=13 \Rightarrow$ rovnice $3x-4y+13=0$.

- Bod $B[3;-2]$: $3x-4y+13=3\cdot3-4\cdot(-2)+13=14$,
- bod $D[-2;2]$: $3x-4y+13=3\cdot(-2)-4\cdot2+13=-1$,

$\Rightarrow$ bod D leží vzhledem k přímce AC v opačné polorovině než bod B.

Bod D neleží uvnitř trojúhelníka ABC, leží v oblasti vyznačené na obrázku.



Shrnutí: Poznatků, které si musíme z analytické geometrie pamatovat, je překvapivě málo, pokud jsou dobře poskládané.